

Cevap Anahtarı  
Grup Teori Dersi Bütünleme Soruları

20) 1-)  $G$  bir grup,  $H \leq G$  olsun.

$$*: H \times G \longrightarrow G$$

$(h, g) \longrightarrow h * g = hg h^{-1}$  ile tanımlanan dönüşüm  $H$ 'nin  $G$  üzerine bir etkisidir, gösteriniz.

20) 2-)  $G$  sonlu bir grup ve  $A$  sonlu bir  $G$ -küme olsun.  $\forall a \in A$  için  $|Orb_G(a)| = [G:G_a]$  olduğunu gösteriniz.

15) 3-)  $p$ -Grubu tarif ediniz ve  $G$  bir  $p$ -grup ise  $G$ 'nin mertebesi  $p$ 'nin bir kuvvetidir, gösteriniz.

10) 4-)  $G$  bir grup  $a \in G$  ve  $o(a) = n$  olsun.  $t \in \mathbb{Z}^+$  için  $o(a^t) = \frac{n}{(n, t)}$  dir, gösteriniz.

5) 5-)  $\mathbb{Z}_{20}$  grubunda  $o(\bar{8}) = ?$

15) 6-) Mertebesi 15 olan grup devirli midir?

15) 7-) Mertebesi 35 olan grup basit midir?

Not: Soru kağıdına cevap yazmayınız.

1 -  $*: H \times G \longrightarrow G$

$$(h, g) \longrightarrow h * g = hg h^{-1}$$

i)  $e \in H$  için  $e * g = e g e^{-1} = g$

ii)  $\forall h, k \in H, \forall g \in G$  için

$$\begin{aligned} (hk) * g &= (hk) g (hk)^{-1} = (hk) g (k^{-1} h^{-1}) = h (k g k^{-1}) h^{-1} \\ &= h * (k g k^{-1}) = h * (k * g) \end{aligned}$$

2 - Defterinizde var

3 - Defterinizde var

4 - Defterinizde var

5-)  $5 \cdot \bar{8} = \bar{8} \oplus \bar{8} \oplus \bar{8} \oplus \bar{8} \oplus \bar{8} = \bar{0}$  olup  $o(\bar{8}) = 5$  tir.

$$6 - |G| = 15 = 3 \cdot 5$$

$$n_3 = 1 + 3k \mid 5, \quad k=0 \text{ için } n_3 = 1$$

$$n_5 = 1 + 5k \mid 3, \quad k=0 \text{ için } n_5 = 1$$

0 halde  $G$ 'nin bir tek Sylow 3-alt grubu ve bir tek Sylow 5-alt grubu vardır. ve Bunlar normaldir.  $G$ 'nin Sylow 3-alt grubu  $P$ , Sylow 5-alt grubu  $Q$  olsun.  $|P|=3$ ,  $|Q|=5$  ve  $P$  y  $Q$  devirlidir.  $P = \langle a \rangle$ ,  $Q = \langle b \rangle$ ,  $a, b \in G$  vardır.

$$|PQ| = \frac{|P| \cdot |Q|}{|P \cap Q|} = \frac{3 \cdot 5}{1} = 15 \text{ olup } PQ = G \text{ dir.}$$

$P \cap Q = \{e\}$  olduğundan  $ab = ba$  dir.  $o(ab) = 15$  olup  $G = \langle ab \rangle$  dir.

$$7 - |G| = 35 = 5 \cdot 7$$

$$n_5 = 1 + 5k \mid 7 \text{ olup } k=0 \text{ için } n_5 = 1 \text{ olup}$$

bir tane Sylow 5-alt grubu vardır. O da

normal olduğundan ve bu altgrup  $P$  iken

$|P|=5$  olup  $P \neq \{e\}$  ve  $P \neq G$  dir. O halde

$G$  basit değildir.